OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a X-a

SUBIECTUL I

Fie $a, b, c \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$. Demonstraţi inegalităţile:

1. $\frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq \sqrt[a+b+c]{a^b b^c c^a}$;
2. $\log_a \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} + \log_b \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} + \log_c \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq 3$.

prof. Gabriela Boeriu

SUBIECTUL II

Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \min\limits_{t \leq x}(t^2 - 2t + 2), & x \leq 1 \\ \max\limits_{t > x}(1 - \sqrt{t}), & x > 1 \end{cases}$

1. Să se artate că funcţia f este injectivă, dar nu este surjectivă.
2. Să se determine $k \in \mathbf{R}$ astfel încât funcţia
   $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \begin{cases} f(x) + k, & x \leq 1 \\ f(x), & x > 1 \end{cases}$ să fie bijectivă.
3. Să se determine g^{-1}.

prof.dr. Viorel Drăghici

SUBIECTUL III

Arătaţi că nu există $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}^*$ astfel încât:

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 3i$$

Traian Duţă

SUBIECTUL IV

Să se rezolve ecuaţia $2^q = 131023 + p^2$, p şi q fiind numere prime.

prof.dr. Ioana Maşca

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect are 7p. Timp de lucru 3 ore.